235 - Problèmes d'interversion de limite et d'intégrales

<u>Cadre</u>: X désigne un ensemble, noté (X,d) s'il s'agit d'un espace métrique, (Y,δ) est un espace métrique, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E,\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (evn). $U\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert.
On écrira CVS (resp. CVU, resp. CVN) pour convergence simple (resp. uniforme, resp. normale).

I. Interversion limite-limite

1) Limite uniforme

[Tau] <u>Déf. ①</u>: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X vers Y, que l'on notera $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}: X\longrightarrow Y$.

23 1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur X si pour tout $x\in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.

~24 2) On dit que $(f_n)_n$ CVU sur X s'il existe $f: X\to Y$ telle que $d_\infty(f_n,f)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où $d_\infty(f_n,f)=\operatorname{Sup}\{\delta(f_n(x),f(x)),\ x\in X\}$

24 <u>Th. ②</u>: Soit $(f_n)_n: X\to Y$, (Y,δ) complet. Alors $f_n \xrightarrow[n]{CVU} f$ SSI $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme.

30 <u>Exercice ③</u>: Soit $(P_n)_n:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ suite de polynômes qui CVU sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Alors, f est un polynôme.

<u>Rq ④</u>: La CVU implique la CVS, mais la réciproque est fausse.

♡ <u>Ex. ⑤</u>: $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur $[0,1]$ vers $\mathbb{1}_{[0,1[}+\mathbb{1}_{\{1\}}$, mais pas uniformément.

25 <u>Th. ⑥</u>: Soit $(f_n)_n:(X,d)\to(Y,\delta)$ et $a\in X$. On suppose que les f_n sont continues en a et que $(f_n)_n$ CVU vers une fonction f. Alors f est continue en a.

<u>Coro. ⑦</u>: Soit $(f_n)_n:(X,d)\to(Y,\delta)$ continues sur X et convergeant (localement) uniformément vers f. Alors, f est continue.

<u>Ex. ⑧</u>: Faux si on n'a qu'une CVS, voir Ex. ⑤.

<u>Rq ⑨</u>: Si $(f_n)_n: U\to\mathbb{R}^p$ où $U\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert sont différentiables en $x\in U$, et CVU vers f, f n'a aucune raison d'être différentiable en x.

<u>C-Ex. ⑩</u>: $\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right)_n$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui CVU vers $x\mapsto|x|$ qui n'est pas dérivable en 0. ♡

<u>Th. ⑪</u>: Soit $(f_n)_n: U\to\mathbb{R}^d$ différentiables sur U. Si :

1) $\exists\, x_0\in U\ /\ (f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ♡
2) U est connexe
3) $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers $\Phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$

Alors, $(f_n)_n$ CVS vers une fonction $f: U\to\mathbb{R}^d$ et localement uniformément vers f. De plus, f est différentiable sur U et $df=\Phi$.

<u>Appli. ⑫</u>: $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$. [Tau]

<u>Th. ⑬</u>: Soit $(f_n)_n:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, Ω ouvert, une suite de fonctions holomorphes sur Ω, qui CVU sur tout compact de Ω vers $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Alors, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ et $f'=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$. 89

2) Séries entières

<u>Déf./Th. ⑭</u>: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$. Alors $R=\operatorname{Sup}\{r\geq 0,\ (a_n r^n)\text{ bornée}\}$ appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que : [Tau] 36

1) $\forall z\in D(0,R)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
2) $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R)$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

<u>Ex ⑮</u>: • $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum\frac{z^n}{n^2}$ sont de rayon 1

• $\sum\frac{z^n}{n!}$ est de rayon infini.

<u>Rq ⑯</u>: Tout peut se passer sur $\mathcal{C}(0,R)$, appelé cercle d'incertitude. [E|Am] 231

- $\sum z^n$ diverge pour tout $z\in\mathcal{C}(0,1)$
- $\sum\frac{z^n}{n^2}$ converge normalement sur $\overline{D}(0,1)$
- $\sum\frac{z^n}{n}$ diverge si $z=1$, mais converge si $|z|=1$, $z\neq 1$.

<u>Th. ⑰</u>: *(Abel angulaire)* [Gou] 263
Soit $\sum a_n z^n$ de rayon 1 et de somme f sur $D(0,1)$ telle que $\sum a_n$ converge.
Soit $\theta_0\in[0,\pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1 \text{ et } \exists\,\rho>0,\ \theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ z=1-\rho e^{i\theta}\}$
Alors $\lim\limits_{z\to 1,\ z\in\Delta_{\theta_0}} f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

[Hou] **Appli. (19)** : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$

264 **Rq (20)** : La réciproque est fausse : $\sum (-1)^n$ diverge mais $\lim \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$

Th. (21) : (*Taubérien faible*)

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon 1 et de somme f sur $D(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

II. Suites et séries de fonctions intégrables

[Tau] **Th. (22)** : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [a,b] \to \mathbb{K}$ une suite

27 de fonctions intégrables. On suppose que $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[a,b]$.

Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n\,dt$.

♡ **Appli. (23)** : La formule de Cauchy dans un convexe et le Th. (22) nous permettent de montrer qu'une fonction holomorphe est analytique.

[BP] *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est maintenant un espace mesuré.*

Th. (24) : (*théorème de convergence monotone (TCM)*)

117 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ une suite croissante de fonctions mesurables, et $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ (pour la CVS). Alors, $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Appli. (25) : On pose pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

126 Montrer que : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

Th. (26) : (*lemme de Fatou*)

132 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ une suite de fonctions mesurables.

Alors, $\int_X \underline{\lim}_n f_n\,d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n\,d\mu$.

Th. (27) : (*théorème de convergence dominée (TCD)*)

~ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{K}$ suite de fonctions mesurables qui converge μ-pp.

134 vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g : X \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp en x. (*domination*)

Alors f est intégrable, et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Ex. (28) : En remarquant que $0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$ pour $u \in [0,1]$, [ZQ]

remontrer le résultat de l'Appli. (25). 313

Rq (29) : L'hypothèse de domination est indispensable (prendre ♡

$(\mathbb{1}_{[n,n+1[})_n$ comme contre-exemple).

III. Intégrales à paramètres [BP]

Th. (30) : (*continuité des intégrales à paramètre*)

Soit $f : \begin{array}{l} Y \times X \longrightarrow \mathbb{K} \\ (y,x) \longmapsto f(y,x) \end{array}$ une application. Si : 138

1) $\forall y \in Y$, $x \mapsto f(y,x)$ est mesurable
2) μ-pp. en x, $y \mapsto f(y,x)$ est continue.
3) $\exists g : X \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que : $\forall y \in Y$, $|f(y,x)| \leq g(x)$ μ pp en x (*domination*)

Alors, $F : y \mapsto \int_X f(y,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et continue sur Y.

Appli. (31) : (*transformée de Fourier*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt}\,dm(x)$ où $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ 140

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Appli. (32) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors l'application $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t)\,dt$ est continue et bornée.

Th. (33) : (*dérivabilité des intégrales à paramètre*)

Soit $f : \begin{array}{l} I \times X \longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) \longmapsto f(t,x) \end{array}$ une application où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Si

1) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ~
2) $\exists A \in \mathcal{A}$, $\mu(A^c) = 0$ tel que : 141
   - $\exists t_0 \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t_0,x)$ est intégrable
   - $\forall (t,x) \in I \times A$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$
   - $\exists g : A \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que : $\forall (t,x) \in I \times A$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$

Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ est définie sur I et dérivable sur I de dérivée $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$

♡ **Rq 34 :** ⚠ Ne PAS écrire : $\forall t \in I$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable μ-pp en x

Prendre par exemple $f : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{1}_{[0,t]}(x)\mathbb{1}_{[0,A]}(x)$ où $A>0$.

142 **Appli 35 :** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $(x \mapsto xf(x)) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}'(t) = i\,\widehat{xf}(t)$.

~142 **Appli 37 :** Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et pour tout $0 \leq i \leq k$, $(f*g)^{(i)} = f * g^{(i)}$ où $1 \leq p < +\infty$ et $k \in \mathbb{N}$

♡ On peut alors montrer que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sont denses dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

[AM] **Th. 38 :** *(holomorphie sous l'intégrale)*

94 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \begin{array}{l} \Omega \times X \to \mathbb{C} \\ (z,x) \mapsto f(z,x) \end{array}$ une application. Si :

1) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable
2) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω
3) $\forall K \subset \Omega$, K compact, $\exists\, g_K : X \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que :
$\forall (z,x) \in K \times \Omega$, $|f(z,x)| \leq g_K(x)$

Alors $F(z) = \int_X f(z,x)\,d\mu(x)$ définit une fonction holomorphe sur Ω.
De plus ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

[Beck] 82 DVP2 **Appli 39 :** Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. On pose pour $z \in P$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$.
Alors, $\Gamma \in \mathcal{H}(P)$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un pôle simple en tout $-n \in \mathbb{Z}^-$.

IV. Théorèmes de Fubini

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sont des espaces mesurés. μ et ν sont σ-finies.

[BP] **Th. 40 :** *(Fubini-Tonelli)*

Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction mesurable. Alors :

221 1) Les fonctions partout définies $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ mesurables.

2) $\int_{X \times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$

Appli 41 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f, g \geq 0$, alors $f * g$ est mesurable.

Appli 42 : Calculer $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ à partir de $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$. [BP]

Th. 43 : *(Fubini)*

Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{K}$ une fonction intégrable. Alors 222

1) μ-pp en x, $y \mapsto f(x,y)$ est ν-intégrable
ν-pp en y, $x \mapsto f(x,y)$ est μ-intégrable
2) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est définie μ-pp et μ-intégrable
$y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ est définie ν-pp et ν-intégrable
3) $\int_{X \times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Ex. 44 : *(familles sommables)*

Soit $(u_{n,p})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| < +\infty$, alors 226
$\sum_{n,p \geq 0} u_{n,p}$ existe et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n,p\geq 0} u_{n,p}$

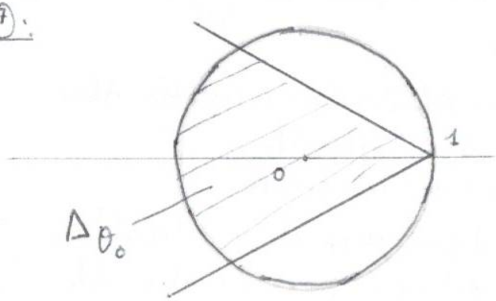
Exercice 45 : Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy} \end{array}$ 223

Montrer que $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f\,dx\right) dy = 0$ et que $\int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{[0,1]} f\,dy\right) dx > 0$.

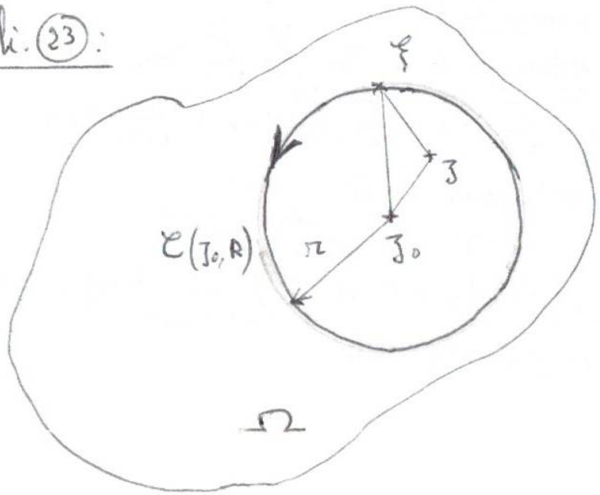
En déduire que f n'est pas intégrable.

Annexe :

Th. 17 :



Appli. 23 :



Références :

- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe pour la L3*
- [ElAm] El Amrani, *Suites et séries ...*
- [AM] Amar, Matheron, *Analyse complexe*
- [BP] Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration*
- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3ᵉ éd.)
- [ZQ] Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- ♡ : à savoir par coeur